

**Автономная некоммерческая организация
профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
(АНО ПО «ПГТК»)**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по изучению дисциплины математического и
общего естественнонаучного цикла
ЕН01.ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

для студентов специальности

09.02.03 Программирование в компьютерных системах

(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника

Техник-программист

(базовая подготовка)

Форма обучения

Очная

Пермь 2020

Методические рекомендации по изучению дисциплины ЕН01.Элементы высшей математики предназначены для студентов и преподавателей АНО ПО «ПГТК». Методические указания определяют ориентиры и способствуют более обстоятельному усвоению программного материала, организации самостоятельного процесса изучения учебного предмета обучающимися по специальности Программирование в компьютерных системах.

Данные методические рекомендации помогут организовать самостоятельную деятельность студентов на основе деятельного и компетентного подходов к обучению, что соответствует ФГОС СПО по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах.

Автор-составитель: Долганова Я.А., ст. преподаватель

Утверждено на заседании кафедры математических и естественно-научных дисциплин, протокол № 6 от «6» февраля 2020 г.

Рекомендованы к утверждению педагогическим советом АНО ПО «ПГТК» (протокол от «21» февраля 2020 г. № 3).

Содержание

Пояснительная записка	5
Методические указания по проведению практического занятия № 1	
"Вычисление предела функции в точке, на бесконечности»	7
Методические указания по проведению практического занятия № 2	
«Раскрытие простейших неопределенностей»	7
Методические указания по проведению практического занятия № 3	
«Использование замечательных пределов»	7
Методические указания по проведению практического занятия № 4	
«Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва»	11
Методические указания по проведению практического занятия № 5	
«Исследование функций на точки разрыва»	11
Методические указания по проведению практического занятия № 6	
«Основные правила дифференцирования функций»	17
Методические указания по проведению практического занятия № 7	
«Нахождение производной сложной функции, обратной функции»	17
Методические указания по проведению практического занятия № 8	
«Нахождение производной тригонометрических функций»	17
Методические указания по проведению практического занятия № 9	
«Вторая производная. Производные высших порядков»	
Методические указания по проведению практического занятия № 10	
«Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя»	25
Методические указания по проведению практического занятия № 11	
«Нахождение производной иррациональных функций»	25
Методические указания по проведению практического занятия № 12	
«Исследование функции с помощью производной»	28
Методические указания по проведению практического занятия № 13	
«Методы интегрирования неопределенного интеграла»	32
Методические указания по проведению практического занятия № 14	
«Методы интегрирования определенного интеграла»	39
Методические указания по проведению практического занятия № 15	
«Вычисление двойных интегралов в случае области 1 и 2 типа»	52
Методические указания по проведению практического занятия № 16	
«Действия над матрицами, вычисление определителей»	

Методические указания по проведению практического занятия № 17

«Решение системы линейных уравнений в матричной форме» Методические указания по проведению практического занятия № 18

«Решение СЛАУ методом Гаусса и методом Крамера»

Методические указания по проведению практического занятия № 19

« Составление уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их построение»

Литература

1 Пояснительная записка

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по дисциплине «Элементы высшей математики» у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по дисциплине «Элементы высшей математики»:

- 1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;
- 2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;
- 3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;
- 4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;
- 5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Критерии оценки:

Ответ оценивается отметкой «5», если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которые не являются следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный

вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практические занятия № 1,2,3

Тема: Вычисление предела функции в точке, на бесконечности.

Тема: Раскрытие простейших неопределенностей.

Тема: Использование замечательных пределов.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения:

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число **a** называется **пределом последовательности**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$

$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$

Решение $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{6}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(10 - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{1}{10}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1}$$

Пример 2. Вычислить предел

Решение $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(12 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{0}{12} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8}$$

Пример 3. Вычислить предел

Решение $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{6}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{7}{n} - \frac{8}{n^2} \right)} = \frac{1}{0} = \infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})$

Решение

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((\sqrt{2n+8})^2 - (\sqrt{n-1})^2)}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+8) - (n-1)}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+8-n+1}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2 \left(\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}\right)} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{9}{n}\right)}{n \left(\sqrt{\left(\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}\right)} = \frac{1}{0} = \infty\end{aligned}$$

Число A называют пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$),

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ ($c = \text{const}$).

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел (число $e = 2,718...$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x \cdot 8}{6 \cdot 8x} = \frac{5 \cdot 8}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(1+5x)}{5x} = 5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}} \stackrel{\left[\frac{1}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x} \cdot 5x \cdot \frac{1}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(5x \cdot \frac{1}{3x}\right)} = e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right)^x$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right)^x &\stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 + 3}{x^2 + 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3} \cdot \frac{3}{x^2 + 1} \cdot x} \right)^{\frac{x^2 + 1}{3} \cdot \frac{3}{x^2 + 1} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 + 1} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 1}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, нужно предельное значение

аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \rightarrow 0; \quad \frac{c}{0} \rightarrow \infty; \quad \frac{\infty}{c} \rightarrow \infty; \quad c \cdot \infty \rightarrow \infty; \quad c \cdot 0 \rightarrow 0; \quad a^\infty \rightarrow 0, \text{ если } 0 < a < 1; \quad a^\infty \rightarrow \infty, \text{ если } a > 1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty} \right); \quad \left(\frac{0}{0} \right); \quad (0 \cdot \infty); \quad (\infty - \infty); \quad (1^\infty); \quad (\infty^0); \quad (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 15}{10x^2 - 4}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 15}{10x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot 1^3 + 15}{10 \cdot 1^2 - 4} = \frac{2 + 15}{10 - 4} = \frac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4+4)}{(4-1)} = \frac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}}{x-5} &\stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x})(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})}{(x-5)(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{((\sqrt{2x+8})^2 - (\sqrt{23-x})^2)}{(x-5)(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{((2x+8) - (23-x))}{(x-5)(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x-15)}{(x-5)(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x})} = \\ &= \frac{3}{(\sqrt{2 \cdot 5 + 8} + \sqrt{23-5})} = \frac{3}{(\sqrt{18} + \sqrt{18})} = \frac{3}{2\sqrt{18}} = \frac{3}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Содержание практических работ:

Практическое занятие № 1. Вычислить пределы последовательностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n}{n+6}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+3}{1+2n}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+16}{9n}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(n-1)^2 - (n+1)^2}$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - 1}{n+2}$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 16n}$

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-7} - \sqrt{n+2})$

Практическое занятие № 2. Вычислить пределы функций:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 3x^2 + x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x} - 3)}{\sqrt{x} - 2}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x} - 1}{x+2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 15x^2 + x}{18x^2 + 15x}$

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x-7} - \sqrt{x+2})}{x-2}$

Практическое занятие № 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2} \right)^{x^2 + 1} & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x & 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} \\
 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x^2)^{x^3 \cdot \frac{1}{x}} & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 4x} \\
 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1 - 2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x} & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\sin x \cdot x^2}
 \end{array}$$

Практические занятия № 4,5

Тема: Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.

Тема: Исследование функций на точки разрыва.

Цель: сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Теоретические сведения:

Функция $y = f(x)$ **называется непрерывной** **в точке** x_0 , если она: 1) определена в точке x_0 ; 2) имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

- 1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$

Решение:

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= (3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1) - (3x_0^2 - 2x_0 + 1) = 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1 = \\
 &= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x) = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

- 1) x_0 – точка устранимого разрыва, если а) $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$
 б) в точке x_0 функция не определена
- 2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - скачок функции

3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Пример 2:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a) y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2$$

$$f(1) = 0$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ точка устранимого разрыва

$$б) y = f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x - 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 2) = -1$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ точка разрыва I рода

$$h = -1 - 1 = -2$$

$$в) y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ точка разрыва II рода

Пример 3.

Задана функция $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ и два значения аргумента $x_1 = 3, x_2 = 1$.

Требуется:

- найти пределы функции при приближении к каждому из данных значений x слева и справа;
- установить является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x ;
- сделать схематический чертеж.

Решение. Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[\begin{array}{l} t = x - 3, \\ x \rightarrow 3 - 0, t \rightarrow 0 - 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{t}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[\begin{array}{l} t = x - 3, \\ x \rightarrow 3 + 0, t \rightarrow 0 + 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{t}} = \infty.$$

Левый предел конечен и равен 0, а правый предел бесконечен. Следовательно, по определению $x_0 = 3$ точка разрыва второго рода.

Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{т.е.} \quad x_0 = 1 \quad \text{точка}$$

непрерывности функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$.

Сделаем схематический чертеж.

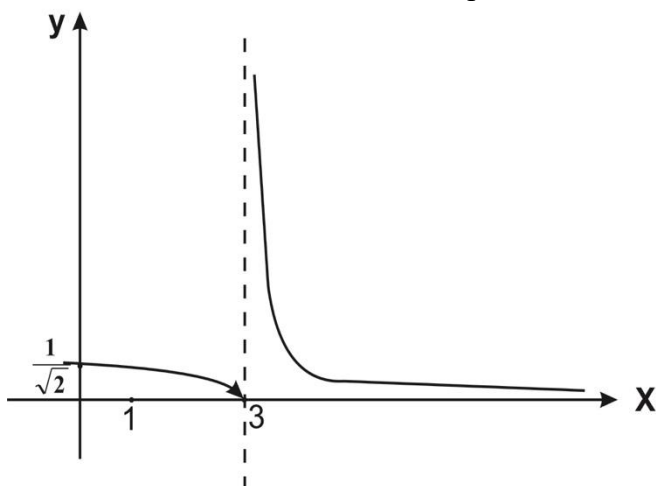


Рис. 1

Пример 4.

Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной.

Требуется:

- 1) найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
- 3) сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция $y_1 = x-1$ непрерывна для $x < 0$, функция $y_2 = x^2-1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3 = 2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1, \infty)$.

Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x = 0$ и $x = 1$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0-0} y = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2-1) = -1$, $y(0) = -1$. Таким образом, точка $x = 0$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2 = 2$, $y(1) = 1-1 = 0$. Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По

определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x = 1$ равен $d = \left| \lim_{x \rightarrow 1+0} y - \lim_{x \rightarrow 1-0} y \right| = |2 - 0| = 2$.

Сделаем схематический чертеж

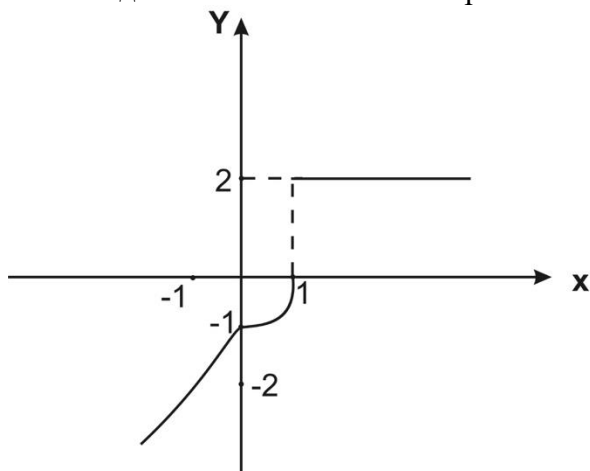


Рис. 2

Содержание практической работы:

Вариант 1.

1. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется.

- 1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;
- 2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;
- 3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = e^{\frac{1}{x-7}}, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 0.$$

2. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

- 1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
- 3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность. Сделайте чертёж.

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -1 \\ 2 - 2x, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется.

- 1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;
- 2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = \ln(x-8), \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 8.$$

2. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x < 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ x^2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность. Сделайте чертёж.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x \leq -1 \\ 3x, & \text{если } -1 \leq x \leq 3, \\ 5, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется.

1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = e^{\frac{1}{x-2}}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

2. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность. Сделайте чертёж.

$$y = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x < 0 \\ x^2+1, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Вариант 4.

1. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется.

1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = \frac{x-4}{x^2+x-20}, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -5.$$

2. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

- 1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
- 3) Сделать схематический чертёж.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность. Сделайте чертёж.

$$y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leq 0 \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ 2x, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

Вариант 5.

1. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется.

- 1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;
- 2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;
- 3) Сделать схематический чертёж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = 5^{\frac{1}{11-x}}, \quad x_1 = 11, \quad x_2 = 3.$$

2. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

- 1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
- 3) Сделать схематический чертёж.

$$y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2+1, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность. Сделайте чертёж.

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{если } x \leq 0 \\ 4-x^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

Вариант 6.

1. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется.

- 1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;
- 2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;
- 3) Сделать схематический чертёж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = e^{\frac{1}{x-7}}, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 0.$$

2. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

- 1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x < 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ x^2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

3. Исследуйте функцию на непрерывность. Сделайте чертёж.

$$y = \begin{cases} 3x + 1, & \text{если } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Практические занятия № 6,7,8

Тема: Основные правила дифференцирования функций.

Тема: Нахождение производной сложной функции, обратной функции.

Тема: Нахождение производной тригонометрических функций.

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, тригонометрических функций, знать геометрический смысл производной.

Теоретические сведения:

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

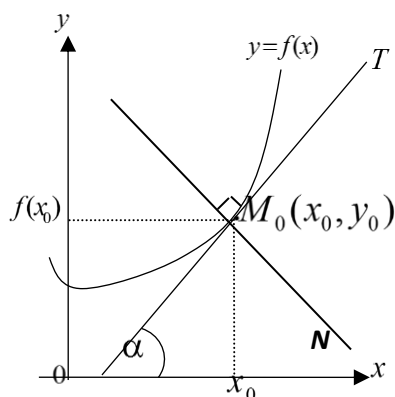
Обозначения производной в точке x_0 :

$$f'(x_0), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}, \quad \left. \frac{df(x_0)}{dx} \right|_{x_0}, \quad y'_x \Big|_{x_0}, \quad y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной.



Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3)$$

Правила дифференцирования

№ пп	U = u(x), V=V(x) — дифференцируемые функции	№ пп	U = u(x), V=V(x) — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)], y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', c = \text{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — u = u(x) — дифференцируемая функция	независимая переменная,
1	$C' = 0$	9 $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	10 $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	11 $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	12 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; u < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	13 $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; u < 1$
6	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} (u > 0)$	14 $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \frac{u'}{u} (u > 0)$	15 $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	

Производная сложной и обратной функций

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом X и независимым аргументом X .

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция

$y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

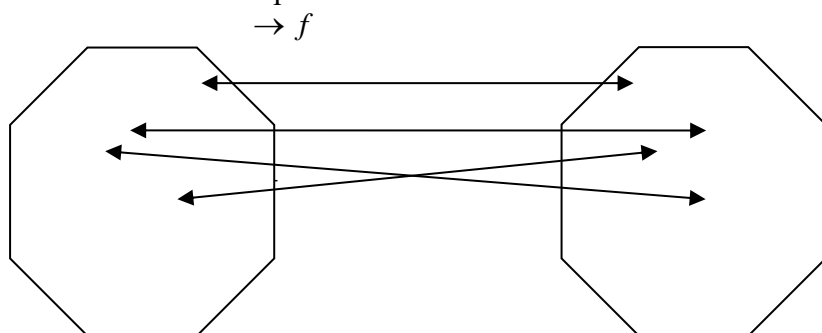
Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Обратная функция

Определение. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E . Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (рис1). Такая функция $x = \varphi(y)$ называется обратной к функции $y = f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $x = \varphi(y)$ и $y = f(x)$ говорят, что они являются взаимно обратными.



$$1) y = \frac{3}{x} \text{ и } x = \frac{3}{y}$$

$$2) y = x + 1 \text{ и } x = y - 1$$

$$3) y = 2x - 3 \text{ и } x = \frac{y + 3}{2}$$

(Для того, чтобы для функции $y = f(x)$ найти обратную функцию надо переменную x выразить через переменную y).

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Пример 1. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}; \text{ б) } s = (e^t - 2 \ln t) \sin t; \text{ в) } u = \operatorname{ctg}^3 \frac{v}{3}; \text{ г) } z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = \\ &= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}. \end{aligned}$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t , т. е. $t=1$, получим: □

$$s = [(e^t - 2 \ln t) \sin t]' = (e^t - 2 \ln t)' \sin t + (e^t - 2 \ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)') \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t = \left(e^t - \frac{2}{t} \right) \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v , т. е. $v=1$; □ используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)^2 \right]' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(-\frac{\left(\frac{v}{3} \right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = -\frac{2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{3 \sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t=1$, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1 + 4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1 + 4t^2)'}{(1 + 4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1 + 4t^2}(1 + 4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0 + 4 \cdot 2t)}{(1 + 4t^2)^2} = \frac{2 - 8t \operatorname{arctg} 2t}{(1 + 4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

$$1) y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$$

$$2) y'(x) = ((x^2 - 3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}}(x^2 - 3)' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = 2.$$

Подставим x_0 , $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x - 2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x - 2), \text{ или } x + 2y - 4 = 0 \text{ — уравнение нормали.}$$

Пример 3. Найти производную y'_x , если функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(5 - 2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5 - 2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \frac{(5-2t)'}{5-2t} = \frac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \frac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2 - 20t + 26}.$$

Пример 4. Вычислить производную сложной функции:

1) $y = \ln(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x} + 1})$.

Решение:

$$\begin{aligned} y &= \ln(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x} + 1}) = \left| (\ln u)' = \frac{1}{u} (u)' \right| = \left(\frac{1}{e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x} + 1}} \right) (e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x} + 1})' = \\ &= \left| (u+v)' = u' + v'; (e^{kx})' = k e^x; (\sqrt[n]{u^m})' = (u^{\frac{n}{m}})' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} u' \right| = \\ &= \frac{4e^{4x} + \frac{4e^{4x}}{3} (e^{4x} + 1)^{-\frac{2}{3}}}{(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x} + 1})} \end{aligned}$$

2) $y = x \arctg(2x+1) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= (x)' \arctg x + x (\arctg(2x+1))' - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} (1+x^2)' = \\ &= 1 \times \arctg x + \frac{x}{1+(2x+1)^2} \times (2x+1)' - \frac{2x}{2(1+x^2)} = \arctg x + \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Пример 5. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение: Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Содержание практических работ:

Практическое занятие № 6.

1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) а) $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; б) $s = (1+t^2)(2 - 3\operatorname{arccctg} t)$;

2) а) $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; б) $s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$;

3) а) $y = 7x^2 + \frac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2}$; б) $s = (3 - \cos t)(5 + 6\sin t)$;

4) а) $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$; б) $s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t)$;

5) а) $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; б) $s = t^4(4 + \operatorname{arctg} t)$;

6) а) $y = x^4 + \frac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; б) $s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 4\operatorname{ctg} t)$;

2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

1) $\frac{x^2-3}{x}$, $x_0 = 1$.

2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0 = 2$.

3) $\frac{x^2+3x}{3}$, $x_0 = -1$.

4) $\sqrt{x} + 2x$, $x_0 = 9$.

5) $\frac{x^2}{x-2}$, $x_0 = 1$.

6) $\sqrt{1+3x}$, $x_0 = 1$.

Практическое занятие № 7.

1. Найти производную y'_x функции $y = y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos(2t + 6) \\ y = \sin(2t + 6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

2. Найдите производную функции:

Вариант 1

1) $y = (3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3})^5$

2) $y = \sqrt{2-5x} + (3x-5)^6$

3) $y = \frac{(3x-5)^4}{(2x-4)^3}$

Вариант 2

1) $y = \left(4x^6 - 7x^2 + 9x + \frac{\pi}{4}\right)^4$

2) $y = (9x-1)^5 + \sqrt{5-x^2}$

3) $y = \frac{(5-2x)^3}{(3x+7)^4}$

Вариант 3

1) $y = \left(4x^3 - 9x^2 + 3x - \frac{1}{3}\right)^4$

2) $y = (2x-9)^{10} + \sqrt{3x-1}$

3) $y = \frac{(8-5x)^4}{(2x-4)^3}$

Вариант 4

1) $y = (8x^6 - 25x^2 - 8x + \pi)^5$

2) $y = (3-8x)^5 + \sqrt{5-2x}$

3) $y = \frac{(4-8x)^3}{(6-5x)^4}$

Вариант 5

1) $y = (-2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3}x)^4$

2) $y = (8x-7)^3 + \sqrt{9-3x}$

$$3) \quad y = \frac{(4x-9)^4}{(3-5x)^3}$$

Вариант 6

$$1) \quad y = \left(7x^5 - 2x^3 + 8x - \frac{\pi}{2} \right)^5$$

$$2) \quad y = (3-8x)^3 + \sqrt{4-x^3}$$

$$3) \quad y = \frac{(4-5x)^3}{(4x+7)^4}$$

Практическое занятие № 8.

1. Найдите производную функции:

Вариант 1

$$1) \quad y = \frac{7}{x} + 3\sqrt{x} - \operatorname{tg} 2x - 3^x$$

$$2) \quad y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Вариант 2

$$1) \quad y = \frac{8}{x} - 2\sqrt{x} + \cos 3x - \ell^{2x}$$

$$2) \quad y = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Вариант 3

$$1) \quad y = \frac{4}{x} + 5\sqrt{x} + \operatorname{ctg} 2x + 5^x$$

$$2) \quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Вариант 4

$$1) \quad y = \sin 3x - \frac{1}{x} + 6\sqrt{x} - \ell^{4x}$$

$$2) \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Вариант 5

$$1) \quad y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - \operatorname{ctg} 3x + 5^x$$

$$2) \quad y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Вариант 6

$$1) \quad y = -\frac{5}{x} - 7\sqrt{x} + \sin 2x - \ell^{3x}$$

$$2) \quad y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

2. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

$$1) \quad y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$2) \quad y = (\cos x)^x$$

- 3) $y = x^{\ln x}$
 4) $y = (\sin x)^{\ln x}$
 5) $y = x^{\cos x}$
 6) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$

Практические занятия № 9,10,11

Тема: Вторая производная. Производные высших порядков.

Тема: Производные и дифференциалы высших порядков.

Правило Лопиталя.

Тема: Нахождение производной иррациональных функций.

Цель: сформировать умение находить производные n -го порядка функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, иррациональных функций, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения:

Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3 y}{dx^3}$ и т. д.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \times \Delta x$, где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется **дифференциалом функции** и обозначается dy :

$$dy = f'(x) \times \Delta x. \quad (dy = f'(x)dx)$$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2 \ln x + 1))' = x'(2 \ln x + 1) + x(2 \ln x + 1)' = 2 \ln x + 1 + x \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

Пример 2. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14};$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞ , определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = \infty \cdot 4 = \infty, \quad \text{т. к. } \frac{2}{x^2} \rightarrow 0, \quad \frac{3}{x^3} \rightarrow 0.$$

$$\text{Аналогично: } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 6) = \infty.$$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^3 + 2x - 3)'}{(x^2 + 6)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 2}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x^2 + 2)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 12x = \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14} &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2(-7)^2 + 15(-7) + 7}{(-7)^2 + 5(-7) - 14} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(2x^2 + 15x + 7)'}{(x^2 + 5x - 14)'} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4x + 15}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4(-7) + 15}{2(-7) + 5} = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9}. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

$$\text{а) } y = x + \cos 2x; \quad \text{б) } u = 3 + e^{-x}; \quad \text{в) } s = \ln 3t.$$

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

$$\text{а) } dy = (x + \cos 2x)' dx = (1 - \sin 2x \cdot 2) dx = (1 - 2 \sin 2x) dx.$$

$$\text{б) } du = (3 + e^{-x})' dx = e^{-x}(-1) dx = -e^{-x} dx.$$

$$в) ds = (\ln 3t)' dt = \frac{(3t)'}{3t} dt = \frac{3}{3t} dt = \frac{1}{t} dt.$$

Содержание практических работ:

Практическое занятие № 9

Найти производную второго порядка функции $y=f(x)$.

- 1) $y = \ln x + 9$
- 2) $y = \cos x - \ln x$
- 3) $y = \sin x + x^4$
- 4) $y = x^2 + \sin x$
- 5) $y = x + \ln x$
- 6) $y = 3e^x + 2x$

Практические занятия № 10, 11

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{x^2 - 5x + 4};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-5x} - 1}{\operatorname{arctg} x}.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \cos x}.$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{1 - 3x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{\sin 3x}.$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

2. Найти дифференциалы функций:

Вариант 1

Найдите дифференциал функции:

1. $y = 3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}$
2. $y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - \operatorname{ctg} 3x + 5^x$
3. $y = (-2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3}x)^4$
4. $y = (8x - 7)^3 + \sqrt{9 - 3x}$
5. $y = \frac{(4x - 9)^4}{(3 - 5x)^3}$

Вариант 3

Найдите дифференциал функции:

1. $y = 7x^5 - 2x^3 + 8x - \frac{\pi}{2}$

Вариант 2

Найдите дифференциал функции:

1. $y = 4x^6 - 7x^2 + 9x + \frac{\pi}{4}$
2. $y = -\frac{5}{x} - 7\sqrt{x} + \sin 2x - e^{3x}$
3. $y = \left(7x^5 - 2x^3 + 8x - \frac{\pi}{2}\right)^5$
4. $y = (3 - 8x)^3 + \sqrt{4 - x^3}$
5. $y = \frac{(4 - 5x)^3}{(4x + 7)^4}$

Вариант 4

Найдите дифференциал функции:

1. $y = -2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3}x$

$$2. \quad y = -\frac{5}{x} - 7\sqrt{x} + \sin x$$

$$3. \quad y = (3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3})^5$$

$$4. \quad y = \sqrt{2-5x} + (3x-5)^6$$

$$5. \quad y = \frac{(3x-5)^4}{(2x-4)^3}$$

$$2. \quad y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - \operatorname{ctg} x$$

$$3. \quad y = \left(4x^6 - 7x^2 + 9x + \frac{\pi}{4}\right)^4$$

$$4. \quad y = (9x-1)^5 + \sqrt{5-x^2}$$

$$5. \quad y = \frac{(5-2x)^3}{(3x+7)^4}$$

Вариант 5

Найдите дифференциал функции:

$$1. \quad y = 8x^6 - 25x^2 - 8x + \pi$$

$$2. \quad y = \frac{4}{x} + 5\sqrt{x} + \operatorname{ctg} 2x + 5^x$$

$$3. \quad y = \left(4x^3 - 9x^2 + 3x - \frac{1}{3}\right)^4$$

$$4. \quad y = (2x-9)^{10} + \sqrt{3x-1}$$

$$5. \quad y = \frac{(8-5x)^4}{(2x-4)^3}$$

Вариант 6

Найдите дифференциал функции:

$$1. \quad y = 4x^3 - 9x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

$$2. \quad y = \sin 3x - \frac{1}{x} + 6\sqrt{x} - e^{4x}$$

$$3. \quad y = (8x^6 - 25x^2 - 8x + \pi)^5$$

$$4. \quad y = (3-8x)^5 + \sqrt{5-2x}$$

$$5. \quad y = \frac{(4-8x)^3}{(6-5x)^4}$$

Практическое занятие № 12

Тема: Исследование функции с помощью производной

Цель: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Исследование функции при помощи производных. Исследование и построение графиков сложных функций»

Теоретические сведения:

Исследование функции при помощи производных. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a; b)$ то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Следствие 1 Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2 Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любого $x \in (a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

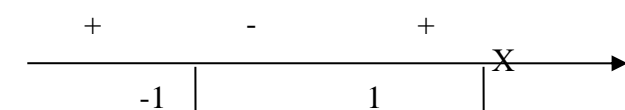
Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонность.

Решение:

$$x \in R = (-\infty; +\infty)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1) \times (x+1)$$



$$f'(x) \geq 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ при } x \in [-1; 1]$$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ и убывает $x \in [-1; 1]$

Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x) = 0$.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ -окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю ($f'(x) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота $y=Rx+b$, то R и b находится по формуле:

$$R = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - Rx).$$

Если $R=0$, то $y=b$ - уравнение горизонтальной асимптоты.

Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

$$1. x \in (-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$$

$$2. x = 0, y(0) = 0$$

Точка $(0;0)$ - точка пересечения графика с осями OX и OY .

3. Функция знакоположительна ($y>0$) в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$

$$4. \text{ Функция } y = \frac{x}{1-x^2} \text{ является нечетной т.к. } y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

5. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0 \times x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение $y=0$. Наклонных асимптот нет.

Прямая $y=0$ является асимптотой и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$.

$$6. \quad y' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}.$$

Так как $y' > 0$ в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

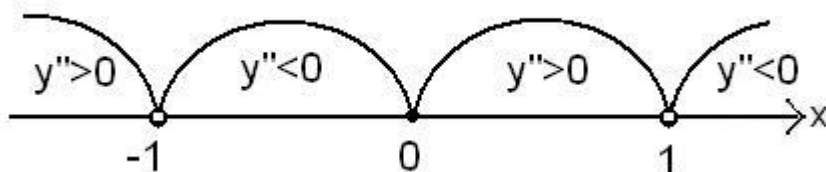
$$7. \text{ Т.к. } y' = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}, \text{ то критическими точками является точки}$$

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1.$$

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

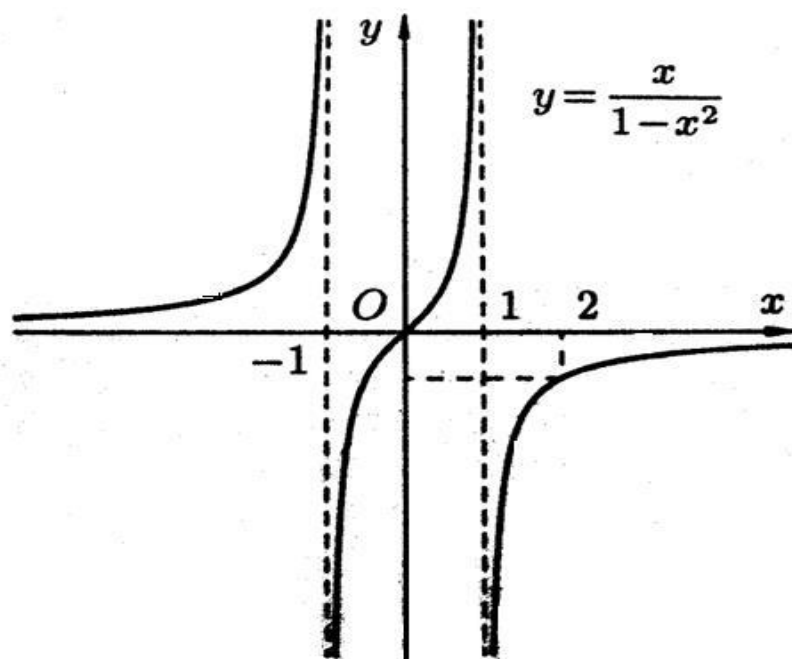
8. Найдем y''

$$y'' = \left(\frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка $(0;0)$ – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$



Содержание практической работы:

Задание. Исследовать функцию и построить её график:

Вариант № 1

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$
2. $y = \frac{5-2x}{x^2-4}$

Вариант № 2

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$
2. $y = \frac{x}{x^2-1}$

Вариант № 3

1. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$
2. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

Вариант № 4

1. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$
2. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

Вариант № 5

1. $y = x^3 - 12x + 6$
2. $y = \frac{2x}{x^2+1}$

Вариант № 6

1. $y = x^3 - 12x^2 - 9x + 1$
2. $y = \frac{1}{x^2+1}$

Практическое занятие № 13

Тема: Методы интегрирования неопределенного интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Теоретические сведения:

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется первообразной для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a, b) , если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, C — const.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется интегрированием. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x); \quad d \int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k — \text{const};$

$$4. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Таблица основных интегралов

- | | |
|---|--|
| 1. $\int 0 du = C; \quad C = \text{const};$ | 2. $\int du = u + C;$ |
| 3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ | 3a. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$ |
| 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C;$ | 5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$ |
| 6. $\int e^u du = e^u + C;$ | 7. $\int \cos u du = \sin u + C;$ |
| 8. $\int \sin u du = -\cos u + C;$ | 9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$ |
| 10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$ | 11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$ |
| 12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + C;$ | 13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$ |
| 14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C;$ | 15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C;$ |
| 16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C;$ | 17. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C;$ |
| 18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C.$ | |

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx; \quad б) \int \left(\frac{5}{11x^2+2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \right) dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx &= \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6} \right) dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы} \\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные} \\ \text{множители вынесем за знак интегралов} \end{array} \right\} = \\
 &= 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} - 3 \int \frac{dx}{x} - \int x^{-4} dx + 2 \int x^{5/6} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем табличные} \\ \text{интегралы 12, 4, 3} \end{array} \right\} = \\
 &= 5 \ln|x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln|x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2 \cdot \frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C = \\
 &= 5 \ln|x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln|x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11} x^{11/6} + C.
 \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}
& \left(5 \ln |x + \sqrt{x^2 + 7}| - 3 \ln |x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11} x^{11/6} + C \right)' = 5 \left(\ln |x + \sqrt{x^2 + 7}| \right)' - \\
& - 3 (\ln |x|)' + \frac{1}{3} (x^{-3})' + \frac{12}{11} (x^{11/6})' + C' = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы} \\ 4, 3, 1 \text{ таблицы производных} \end{array} \right\} = \\
& = 5 \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2 + 7})'}{x + \sqrt{x^2 + 7}} - 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} (-3) x^{-3-1} + \frac{12}{11} \cdot \frac{11}{6} \cdot x^{11/6-1} = 5 \cdot \frac{1 + \frac{(x^2 + 7)'}{2\sqrt{x^2 + 7}}}{x + \sqrt{x^2 + 7}} - \\
& - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6} = 5 \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}}{x + \sqrt{x^2 + 7}} - \frac{3x^3 + 1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} = 5 \frac{\sqrt{x^2 + 7} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 7})\sqrt{x^2 + 7}} - \\
& - \frac{3x^3 + 1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 7}} - \frac{3x^3 + 1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \text{ — верно.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& б) \int \left(\frac{5}{11x^2 + 2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16 - x^2}{4 + x} \right) dx = 5 \int \frac{dx}{11 \left(x^2 + \frac{2}{11} \right)} + 3 \int 5^x dx + \\
& + \int \frac{(4 - x)(4 + x)}{4 + x} dx = \frac{5}{11} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{11}} \right)^2} + 3 \int 5^x dx + 4 \int dx - \int x dx = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы} \\ 13, 5, 2, 3 \text{ таблицы интегралов} \end{array} \right\} = \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}} + 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + \\
& + 4x - \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3 \frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3 \frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{1}{2} x^2 + C \right)' = \frac{5}{\sqrt{22}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x \right)' + \\
& + \frac{3}{\ln 5} (5^x)' + 4x' - \frac{1}{2} (x^2)' + C' = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1} \\ \text{таблицы производных} \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{\sqrt{22}} \left(\sqrt{\frac{11}{2}} x \right)' + \frac{3}{\ln 5} \cdot 5^x \ln 5 + 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} 2x^{2-1} = \frac{5}{\sqrt{22}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}} + \\
&+ 3 \cdot 5^x + 4 - x = \frac{5}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}} \frac{\sqrt{11} \cdot 2}{\sqrt{2}(2+11x^2)} + 3 \cdot 5^x + \frac{(4-x)(4+x)}{4+x} = \\
&= \frac{5}{2+11x^2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \text{ — верно.}
\end{aligned}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C$, то $\int f(x) dx = F(\psi(x)) + C$, где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

- 1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.
- 2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t) dt$.
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$a) \int \cos 4x dx; \quad б) \int e^{9x+1} dx; \quad в) \int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$\begin{aligned}
a) \int \cos 4x dx &= \left| \begin{array}{l} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \int e^{9x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 9x + 1 \\ dt = (9x + 1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 в) \int x(2-x^2)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2 - x^2 \\ dt = (2 - x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2 - x^2)^6 + C.
 \end{aligned}$$

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \quad (3)$$

называемая формулой интегрирования по частям.

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV .

Таблица 1

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
$\int P_n(x) \sin kx dx$ $\int P_n(x) \cos kx dx$ $\int P_n(x) e^{kx} dx$ $n = 1, 2, \dots$	$U = P_n(x) \rightarrow$ $\rightarrow dU = P_n'(x) dx$	$dV = \sin kx dx \rightarrow V = -\frac{1}{k} \cos kx$ $dV = \cos kx dx \rightarrow V = \frac{1}{k} \sin kx$ $dV = e^{kx} dx \rightarrow V = \frac{1}{k} e^{kx}$

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
$\int \ln kx P_n(x) dx$	$U = \ln kx \rightarrow dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x) dx \rightarrow$ $\rightarrow V = \int P_n(x) dx$
$\int \arcsin kx P_n(x) dx$	$U = \arcsin kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{\sqrt{1-k^2 x^2}}$	
$\int \arccos kx P_n(x) dx$	$U = \arccos kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{\sqrt{1-k^2 x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx P_n(x) dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{1+k^2 x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx P_n(x) dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{1+k^2 x^2}$	
$n = 0, 1, 2, \dots$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n , т. е. $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1) \sin 2x dx$; б) $\int (1+2x) \ln x dx$.

Решение.

$$\text{а) } \int (3x-1) \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \rightarrow dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \rightarrow V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1) \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1) \cos 2x + \frac{3}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1) \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x + C.$$

$$\text{б) } \int (1+2x) \ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \rightarrow dU = \frac{dx}{x} \\ dV = (1+2x) dx \rightarrow \\ V = \int (1+2x) dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x (x + x^2) - \int (x + x^2) \frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x (x + x^2) - \int (1+x) dx = \ln x (x + x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

$$1) \int \left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x} \right) dx \quad \int \left(\frac{5}{5x^2+5} + 7^x - \frac{\sin 2x}{\cos x} \right) dx$$

$$2) \int \left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5} \right) dx \quad \int \left(\frac{2}{2x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2} \right) dx$$

$$\begin{array}{ll}
3) \int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x \right) dx & \int \left(\frac{12}{3+3x^2} - 3\cos x + \frac{x^2-9}{x-3} \right) dx \\
4) \int \left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5} \right) dx & \int \left(\frac{6}{2x^2+2} - 2\sin x + 3^x \right) dx \\
5) \int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3} \right) dx & \int \left(\frac{6}{3x^2-9} + \frac{3\sin^3 x - 5}{\sin^2 x} \right) dx \\
6) \int \left(\frac{3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3} \right) dx & \int \left(\frac{16}{2x^2-8} - \frac{3-x^3}{x^4} + 5^x \right) dx
\end{array}$$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

$$\begin{array}{lll}
1) \int \frac{dx}{\sin^2 3x} & \int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}} & \int e^{1-3x} dx \\
2) \int (2x-1)\cos(x^2-x) dx & \int x\sqrt{5+x^2} dx & \int e^{6x+5} dx \\
3) \int 10^{2x+1} dx & \int \sin \frac{x}{2} dx & \int \frac{dx}{5x+3} \\
4) \int x^2(3-x^3)^{10} dx & \int \cos 2x dx & \int e^{\sin x} \cos x dx \\
5) \int \frac{dx}{x \ln x} & \int \sin 2x dx & \int 3^{7x-1} dx \\
6) \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} & \int \sin(2-3x) dx & \int \frac{dx}{e^{3x}}
\end{array}$$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

$$\begin{array}{ll}
1) \int (7x-1)\cos x dx & \int \operatorname{arctg} x dx \\
2) \int (6-5x)e^x dx & \int (7x+5)\ln x dx \\
3) \int x\cos x dx & \int \operatorname{arccotg} x dx \\
4) \int (1+2x)\cos x dx & \int \arcsin x dx \\
5) \int (8x-1)\sin 5x dx & \int (6+5x)\ln x dx \\
6) \int xe^x dx & \int (3x+2)\ln x dx
\end{array}$$

Тема: Методы интегрирования определенного интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Теоретические сведения:

Определенный интеграл

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{i-1} < \dots < x_n = b$

В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку C_i ($x_{i-1} \leq C_i \leq x_i$) и составим сумму

$$S_n = f(C_1) \times \Delta x_1 + f(C_2) \times \Delta x_2 + f(C_3) \times \Delta x_3 + \dots + f(C_n) \times \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(C_i) \times \Delta x_i \quad (*)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида (*) называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Обозначим через α длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\alpha = \max\{\Delta x_i\}$
 $1 \leq i \leq n$

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n , когда $n \rightarrow \infty$ так, что $\alpha \rightarrow 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$

на отрезке $[a; b]$ и обозначают следующим образом: $\int_a^b f(x) dx$ или

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x) \Delta x_i$. В этом случае функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

Основные свойства определенного интеграла

$$1^0 \int_a^b f(x) dx = 0; \quad 2^0 \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$3^0 \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \quad \text{где } a, b, c \text{ любые числа.}$$

$$4^0 \int_a^u k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx; \quad 5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и функция $y = F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка

$$x = \varphi(t)$$

Теорема. Если:

- 1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$;
- 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок $[a; b]$;

$$3) \varphi(\alpha) = a \text{ и } \varphi(\beta) = b \text{ то } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке

$$[a; b], \text{ то имеет место формула } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 (x^2 - 16x + 3)dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^2 - 16x + 3)dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 16 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 = \\ &= \left(\frac{3^3}{3} - 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3 \right) = \\ &= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5 \right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\text{Вычислить } \int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx.$$

Решение:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & dx = \sin \frac{x}{2} dx \\ du = e^x dx & x = -2 \cos \frac{x}{2} \end{array} \right| = -2 \cos \frac{x}{2} e^x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} e^x \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & dx = \cos \frac{x}{2} dx \\ du = e^x dx & x = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right| = -2 \cos \frac{\pi}{2} e^{\pi} + 2 \cos \frac{0}{2} e^0 + 2 \left(2e^x \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx \right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - 4e^0 \sin \frac{0}{2} - \int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx = 2 + 4e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int_0^{\pi} e^x \sin \frac{x}{2} dx = 1 + 2e^{\pi}$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 (x^3 + 10x) dx$

4) $\int_0^8 (21x - 19) dx$

2) $\int_{-2}^3 (3x^2 + 6x - 2) dx$

5) $\int_{-4}^0 (x^3 + 8) dx$

3) $\int_1^3 (x^2 - 16x + 3) dx$

6) $\int_{10}^{13} (2x + 7) dx$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл.

Вариант 1

1. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

2. $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Вариант 2

1. $\int_1^2 e^x dx$

2. $\int_0^2 (3x^2 - 1) dx$

3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Тема: Вычисление двойных интегралов в случае области 1 и 2 типа.

Цель: сформировать умение вычислять двойные интегралы в случае области 1 и 2 типа.

Теоретические сведения:

Понятие двойного интеграла

Двойной интеграл в общем виде записывается следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Разбираемся в терминах и обозначениях:

\iint – значок двойного интеграла;
 D – область интегрирования (плоская фигура);
 $f(x, y)$ – подынтегральная функция двух переменных, часто она довольно простая;
 dx, dy – значки дифференциалов.

Что значит вычислить двойной интеграл?

Вычислить двойной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**. Самое обычное число:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = C, \text{ где } C = const$$

Как вычислить двойной интеграл?

Для того чтобы вычислить двойной интеграл, его необходимо свести к так называемым повторным интегралам. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\text{?}}^{\text{?}} dx \int_{\text{?}}^{\text{??}} f(x, y) dy$$

Вместо знаков вопроса необходимо расставить пределы интегрирования. Причём одиночные знаки вопроса ? у внешнего интеграла – это числа, а двойные знаки вопроса ?? у внутреннего интеграла – это функции одной переменной $y = f(x)$, зависящие от «икс».

Откуда взять пределы интегрирования? Они зависят от того, какая в условии задачи дана область D . Область D представляет собой обычную плоскую фигуру, с которой вы неоднократно сталкивались, например, при вычислении площади плоской фигуры или вычислении объема тела вращения. Очень скоро вы узнаете, как правильно расставлять пределы интегрирования.

После того, как переход к повторным интегралам осуществлён, следуют непосредственно

$$\int_{\text{??}}^{\text{??}} f(x, y) dy$$

вычисления: сначала берётся внутренний интеграл ??, а потом – внешний. Друг за другом. Отсюда и название – повторные интегралы.

Грубо говоря, задача сводится к вычислению двух определённых интегралов.

Второй способ перехода к повторным интегралам встречается несколько реже:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\text{?}}^{\text{?}} dy \int_{\text{??}}^{\text{??}} f(x, y) dx$$

Что поменялось? Поменялся порядок интегрирования: теперь внутренний интеграл берётся по «икс», а внешний – по «игрек». Пределы интегрирования, обозначенные звёздочками –

будут другими! Одиночные звёздочки внешнего интеграла – это числа, а двойные звёздочки внутреннего интеграла – это обратные функции $x = g(y)$, зависящие от «игрек». Какой бы мы ни выбрали способ перехода к повторным интегралам, **окончательный ответ обязательно получится один и тот же:**

$$\int_{\text{?}}^{\text{?}} dx \int_{\text{?}}^{\text{??}} f(x, y) dy = \int_{\text{?}}^{\text{?}} dy \int_{\text{?}}^{\text{??}} f(x, y) dx = C$$

Пожалуйста, **запомните это важное свойство**, которое можно использовать, в том числе, для проверки решения.

Алгоритм решения двойного интеграла:

- 1) Необходимо выполнить чертёж. **Без чертежа задачу не решить.** На чертеже следует изобразить область D , которая представляет собой плоскую фигуру. Чаще всего фигура незамысловата и ограничена какими-нибудь прямыми, параболами, гиперболами и т.д.
- 2) Расставить пределы интегрирования и перейти к повторным интегралам.
- 3) Взять внутренний интеграл
- 4) Взять внешний интеграл и получить ответ (число).

Область интегрирования. Порядок обхода области интегрирования.

Как изменить порядок обхода?

Рассмотрим важнейший вопрос – как перейти к повторным интегралам и правильно расставить пределы интегрирования. Как было сказано выше, сделать это можно так:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\text{?}}^{\text{?}} dx \int_{\text{?}}^{\text{??}} f(x, y) dy$$

И

так:

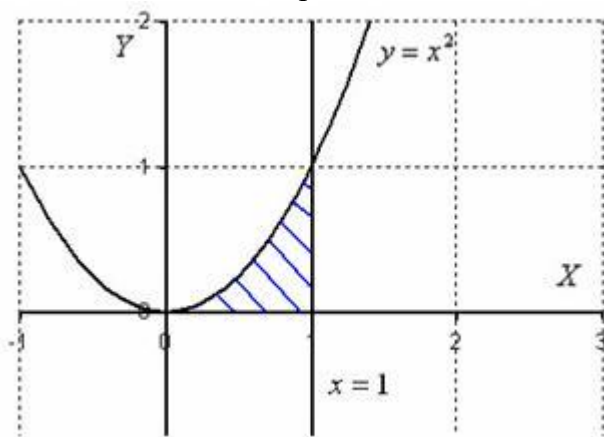
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\text{?}}^{\text{?}} dy \int_{\text{?}}^{\text{??}} f(x, y) dx$$

На практике эта вроде бы несложная задача вызывает наибольшие затруднения, и студенты часто путаются в расстановке пределов интегрирования. Рассмотрим конкретный пример:

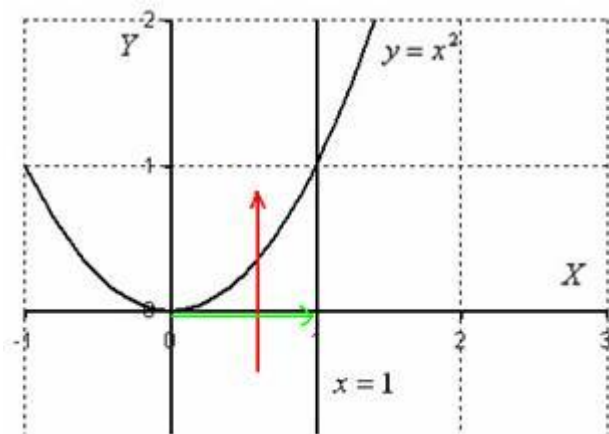
Пример 1

Дан двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ с областью интегрирования $D: x=1; y=x^2; y=0$.
Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Решение: изобразим область интегрирования на чертеже:



Задача состоит в том, чтобы просканировать лучом лазера каждую точку заштрихованной области:



Луч лазера проходит область интегрирования **строго снизу вверх**, то есть указку вы ВСЕГДА держите **ниже** плоской фигуры. Луч входит в область через ось абсцисс, которая задаётся уравнением $y = 0$ и выходит из области через параболу $y = x^2$ (красная стрелка). Чтобы просветить всю область, вам нужно **строго слева направо** провести указкой вдоль оси OX от 0 до 1 (зелёная стрелка).

Итак, что получилось:
 «игрек» изменяется от 0 до x^2 ;
 «икс» изменяется от 0 до 1.

В задачах вышесказанное записывают в виде неравенств:
 $0 \leq y \leq x^2$
 $0 \leq x \leq 1$

Данные неравенства называют **порядком обхода области интегрирования** или просто **порядком интегрирования**

После того, как мы разобрались с порядком обхода, можно перейти от двойного интеграла к повторным интегралам:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$$

Половина задачи решена. Теперь необходимо перейти к повторным интегралам вторым способом. Для этого следует найти обратные функции. Смотрим на функции, которыми задается область $D: x = 1; y = x^2; y = 0$. Если совсем просто, то перейти к обратным функциям, это значит – выразить «иксы» через «игреки». Единственной функцией, где есть и «икс» и «игрек», является $y = x^2$.

Если $y = x^2$, то $x = \pm\sqrt{y}$, причём:
 обратная функция $x = \sqrt{y}$ задает правую ветку параболы;
 обратная функция $x = -\sqrt{y}$ задает левую ветку параболы.

Нередко возникают сомнения, вот, к примеру, функция $x = \sqrt{y}$ определяет левую или правую ветвь параболы? Сомнения развеять очень просто: возьмите какую-нибудь точку параболы, например, $(1, 1)$ (с правой ветви) и подставьте её координаты в любое уравнение,

например, в то же уравнение $x = \sqrt{y}$:

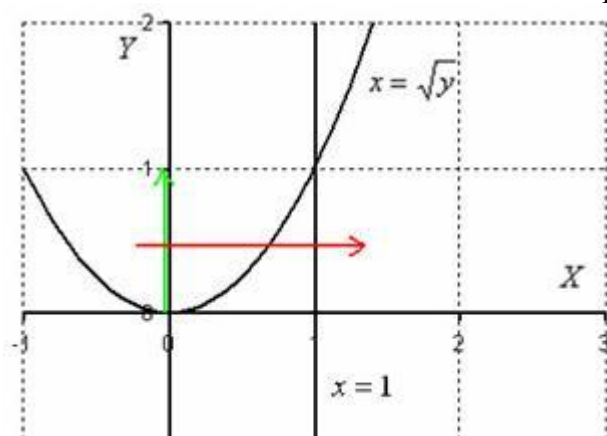
$$1 = \sqrt{1}$$

$$1 = 1$$

Получено верное равенство, значит, функция $x = \sqrt{y}$ определяет именно правую ветвь параболы, а не левую.

Более того, данную проверку (мысленно или на черновике) **желательно проводить всегда**, после того как вы перешли к обратным функциям. Времени займет всего ничего, а от ошибки убережёт наверняка!

Обходим область интегрирования вторым способом:



Теперь лазерную указку держим **слева** от области интегрирования. Луч лазера проходит область **строго слева направо**. В данном случае он входит в область через ветвь параболы $x = \sqrt{y}$ и выходит из области через прямую, которая задана уравнением $x = 1$ (красная стрелка). Чтобы просканировать лазером всю область, нужно провести указкой вдоль оси OY **строго снизу вверх** от 0 до 1 (зеленая стрелка).

Таким образом:

«икс» изменяется от \sqrt{y} до 1;
 «игрек» изменяется от 0 до 1.

Порядок обхода области следует записать в виде неравенств:

$$\sqrt{y} \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

И, следовательно, переход к повторным интегралам таков:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$$

Ответ можно записать следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$$

Окончательный результат вычислений не зависит от того, какой порядок обхода области мы выбрали (поэтому поставлен знак равенства).

Пример 2

Построить область интегрирования и изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^0 dx \int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$$

Решение: По условию дан первый способ обхода области. Решение опять начинается с чертежа. Здесь область D не лежит на блюдечке с голубой каёмочкой, но построить её не составляет особого труда. Сначала «снимаем» функции с пределов интегрирования:

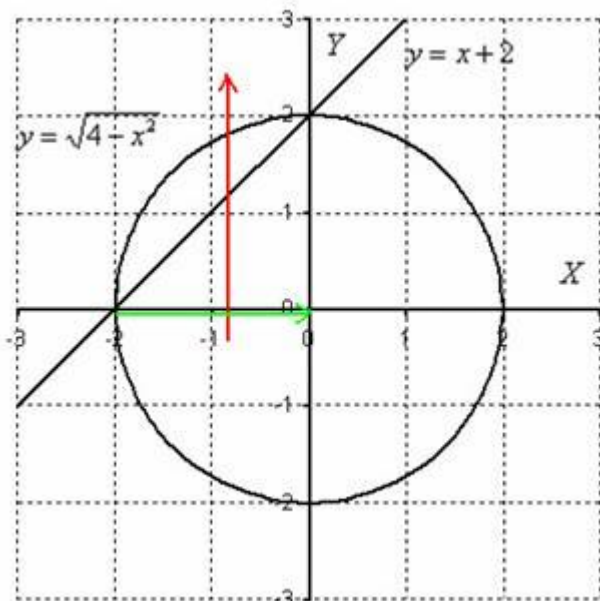
$y = x + 2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$. Функция $y = x + 2$, понятно, задаёт прямую, но что задаёт функция $y = \sqrt{4 - x^2}$? Давайте её немного преобразуем:
 $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 2^2$ – окружность с центром в начале координат

радиуса 2. Функция же $y = \sqrt{4 - x^2}$ задаёт верхнюю полуокружность (не забываем, что если есть сомнения, то всегда можно подставить точку, лежащую на верхней или нижней полуокружности).

Смотрим на пределы внешнего интеграла: «икс» изменяется от -2 до 0 .

Выполним

чертёж:



Для наглядности укажем стрелками первый способ обхода области, который соответствует

$$\int_{-2}^0 dx \int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$$

повторным интегралам условия:

Теперь нужно изменить порядок обхода области, для этого перейдем к обратным функциям (выразим «иксы» через «игреки»):

$$y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$$

Недавно мы преобразовали функцию $y = \sqrt{4 - x^2}$ к уравнению окружности $y^2 + x^2 = 4$, далее выражаем «икс»:

В результате получаем две обратные функции:

$x = \sqrt{4 - y^2}$ – определяет правую полуокружность;

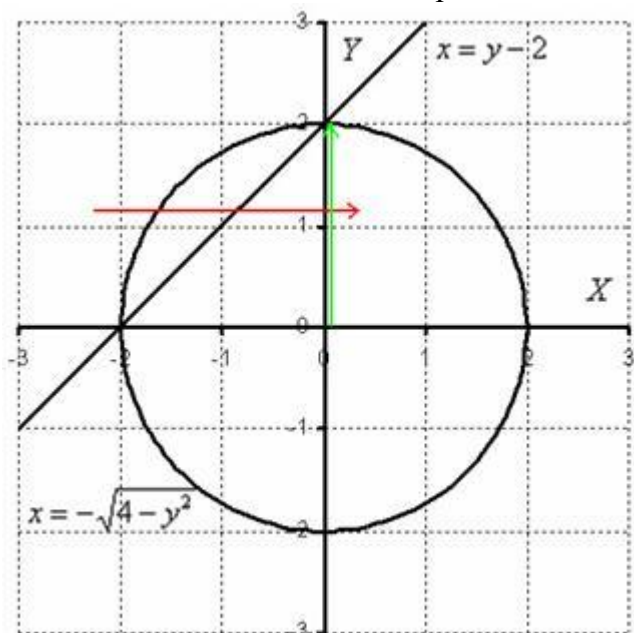
$x = -\sqrt{4 - y^2}$ – определяет левую полуокружность.

Изменим

порядок

обхода

области:



Согласно второму способу обхода, лазерный луч **входит** в область **слева** через левую полуокружность $x = -\sqrt{4 - y^2}$ и **выходит справа** через прямую $x = y - 2$ (красная стрелка). В то же время лазерная указка проводится вдоль оси ординат **снизу вверх** от 0 до 2 (зелёная стрелка).

Таким

образом,

порядок

обхода

области:

$$-\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq y - 2$$

$$0 \leq y \leq 2$$

Ответ:

$$\int_{-2}^0 dx \int_{x+2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y-2} f(x, y) dx$$

Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью двойного интеграла?

Начинаем рассматривать собственно процесс вычисления двойного интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

и знакомиться с его геометрическим смыслом.

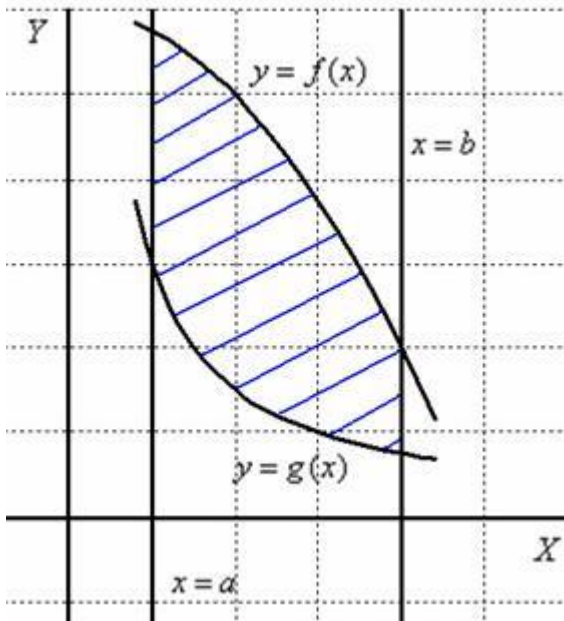
$$\iint_D dx dy$$

Двойной интеграл \iint_D численно равен площади плоской фигуры D (области интегрирования). Это простейший вид двойного интеграла, когда функция двух переменных равна единице: $f(x, y) = 1$.

Сначала рассмотрим задачу в общем виде. Вычислим площадь плоской фигуры D , ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$. Для определённости считаем, что $f(x) > g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Площадь данной фигуры численно равна:

$$S = \iint_D dx dy$$

Изобразим область D на чертеже:



Выберем первый способ обхода области:
 $g(x) \leq y \leq f(x)$
 $a \leq x \leq b$

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy$$

Таким образом:

И сразу важный технический приём: **повторные интегралы можно считать по отдельности**. Сначала внутренний интеграл, затем – внешний интеграл. Данный способ настоятельно рекомендую начинающим в теме чайникам.

1) Вычислим внутренний интеграл, при этом интегрирование проводится по переменной «игрек»:

$$\int_{g(x)}^{f(x)} dy = (y) \Big|_{g(x)}^{f(x)} = f(x) - g(x)$$

Неопределённый интеграл тут простейший, и далее используется формула Ньютона-Лейбница, с той лишь разницей, что **пределами интегрирования являются не числа, а функции**. Сначала подставили в «игрек» (первообразную функцию) верхний предел, затем – нижний предел

2) Результат, полученный в первом пункте необходимо подставить во внешний интеграл:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Более компактная запись всего решения выглядит так:

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy = \int_a^b (y) \Big|_{g(x)}^{f(x)} \cdot dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

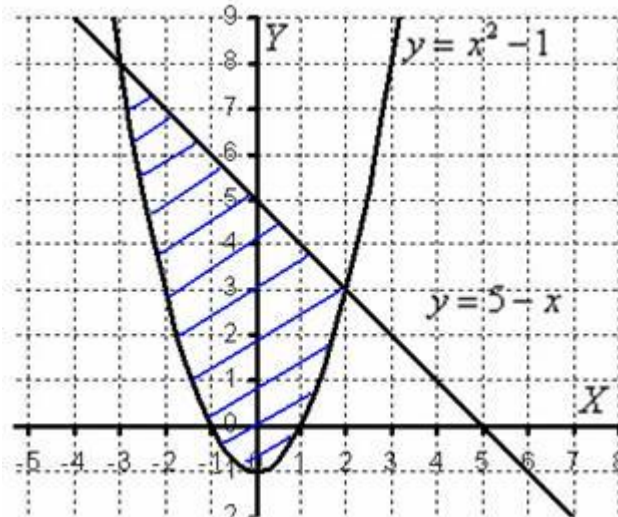
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Полученная формула – это в точности рабочая формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью «обычного» определённого интеграла! То есть, **задача вычисления площади с помощью двойного интеграла мало чем отличается от задачи нахождения площади с помощью определённого интеграла!**

Пример 3

С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры D , ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $x + y = 5$

Решение: Изобразим область D на чертеже:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \iint_D dx dy$$

Выберем следующий порядок обхода области:

$$x^2 - 1 \leq y \leq 5 - x$$

$$-3 \leq x \leq 2$$

Таким образом:

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-3}^2 dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy$$

1) Сначала с помощью формулы Ньютона-Лейбница разбираемся с внутренним интегралом:

$$\int_{x^2-1}^{5-x} dy = (y) \Big|_{x^2-1}^{5-x} = 5 - x - (x^2 - 1) = 6 - x - x^2$$

2) Результат, полученный на первом шаге, подставляем во внешний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx &= \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^2 = 12 - 2 - \frac{8}{3} - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9 \right) = 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} = \\ &= 19 + \frac{27-16}{6} = 19 + \frac{11}{6} = 19 + 1\frac{5}{6} = 20\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Пункт 2 – фактически нахождение площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла.

$$S = 20\frac{5}{6} \text{ ед.}^2$$

Ответ:

Пример 4.

С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры D , ограниченной

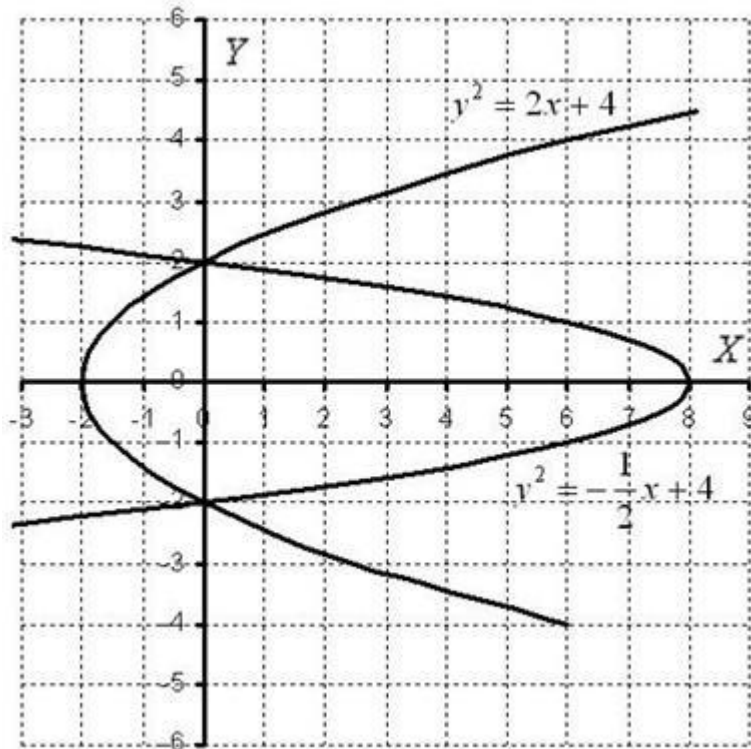
линиями $y^2 = 2x + 4$, $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$

Решение: нас с нетерпением ждут две параболы, которые лежат на боку.
Как проще всего сделать чертёж?

Представим параболу $y^2 = 2x + 4$ в виде двух функций:
 $y = \sqrt{2x + 4}$ – верхняя ветвь и $y = -\sqrt{2x + 4}$ – нижняя ветвь.

Аналогично, представим параболу $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$ в виде верхней $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 4}$ и нижней $y = -\sqrt{-\frac{1}{2}x + 4}$ ветвей.

Далее рулит поточечное построение графиков, в результате чего получается вот такая причудливая фигура:



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \iint_D dx dy$$

Что будет, если мы выберем первый способ обхода области? Во-первых, данную область придётся разделить на две части. А во-вторых, мы будем наблюдать сию печальную картину:

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} dy + \int_0^8 dx \int_{-\sqrt{-\frac{1}{2}x+4}}^{\sqrt{-\frac{1}{2}x+4}} dy$$

Поэтому выразим обратные функции:

$$y^2 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = y^2 - 4 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} - 2$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 8 - 2y^2$$

Обратные функции в данном примере обладают тем преимуществом, что задают сразу всю параболу целиком.

Согласно второму способу, обход области будет следующим:

$$\frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 8 - 2y^2$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

Таким образом:

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2} dx$$

1) Расправляемся с внутренним интегралом:

$$\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2} dx = (x) \Big|_{\frac{y^2}{2}-2}^{8-2y^2} = 8 - 2y^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 2 \right) = 8 - 2y^2 - \frac{y^2}{2} + 2 = 10 - \frac{5y^2}{2}$$

Результат подставляем во внешний интеграл:

$$2) \int_{-2}^2 \left(10 - \frac{5y^2}{2} \right) dy = 2 \int_0^2 \left(10 - \frac{5y^2}{2} \right) dy = \int_0^2 (20 - 5y^2) dy = \left(20y - \frac{5y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 40 - \frac{40}{3} - 0 = \frac{80}{3} = 26 \frac{2}{3}$$

Также обратите внимание на первый шаг: подынтегральная функция $10 - \frac{5y^2}{2}$ является чётной, а отрезок интегрирования симметричен относительно нуля. Поэтому отрезок можно сполвинить, а результат – удвоить.

$$S = 26 \frac{2}{3} \text{ ед.}^2$$

Ответ:

В большинстве практических задач требуется формально вычислить двойной интеграл, но, помимо этого, он обладает отличным геометрическим смыслом – с помощью двойного интеграла помимо площади можно вычислить еще и объём. Геометрический смысл двойного интеграла поясним ниже на конкретных примерах.

Начинаем набивать наш двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ разнообразной начинкой:

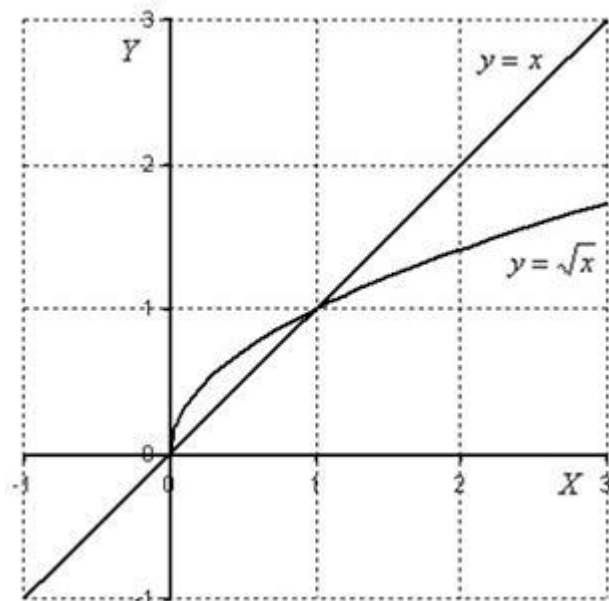
Пример 1

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x dx dy, \quad D: y = \sqrt{x}, \quad y = x$$

Изменить порядок интегрирования и вычислить двойной интеграл вторым способом.

Решение: изобразим область интегрирования D на чертеже:



Выберем следующий порядок обхода:

$$x \leq y \leq \sqrt{x}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Таким образом:

$$\iint_D x dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} x dy = \int_0^1 x dx \int_x^{\sqrt{x}} dy$$

Обратите внимание на следующее действие: в данном случае можно вынести «икс» из внутреннего интеграла во внешний интеграл. Почему? Во внутреннем интеграле

$$\int_x^{\sqrt{x}} x dy$$

интегрирование проводится по «игрек», следовательно, «икс» считается константой. А любую константу можно вынести за знак интеграла, что благополучно и сделано.

С интегралами настоятельно рекомендую разбираться по пунктам:

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, найдём внутренний интеграл:

$$\int_x^{\sqrt{x}} dy = (y) \Big|_x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - x$$

Вместо «игрека» подставляем функции!

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл $\int_0^1 x dx$, при этом ни в коем случае не забываем про «икс», который там уже находится:

$$\int_0^1 x(\sqrt{x} - x) dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^2) dx = \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - (0 - 0) = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

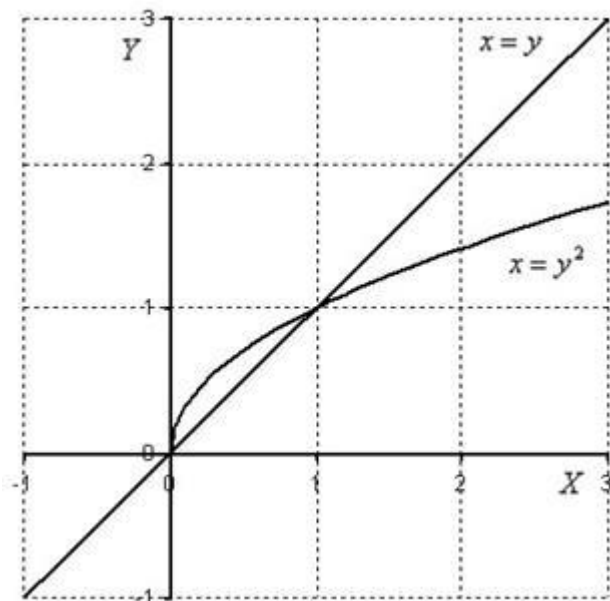
Выполняем вторую часть задания: изменим порядок обхода области и вычислим двойной интеграл вторым способом.

Перейдём к обратным функциям:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

$$y = x \Rightarrow x = y$$

Для наглядности еще раз приведем чертёж, он будет точно таким же, но с другими обозначениями графиков:



Второй способ обхода области:

$$y^2 \leq x \leq y$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Таким образом:

$$\iint_D x dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y x dx$$

Вот здесь уже «икс» является «родным» для внутреннего интеграла, поэтому его нельзя вынести во внешний интеграл.

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{y^2}^y x dx = \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{y^2}^y = \frac{1}{2} ((y)^2 - (y^2)^2) = \frac{1}{2} (y^2 - y^4)$$

Вместо «икса» подставляются функции!

Всегда проявляйте повышенное внимание при подстановке пределов интегрирования.

2) Результат, полученный в первом пункте, подставим во внешний интеграл и проведём окончательные вычисления:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{15} - \frac{3}{15} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

Результаты совпали, значит, задание выполнено верно.

Если есть время, постарайтесь всегда проводить проверку, даже если этого не требуется в условии: вычислили интеграл одним способом – затем изменили порядок обхода области и вычислили вторым способом.

Ответ: $\iint_D x dx dy = \frac{1}{15}$

Пример 2.

Вычислить

двойной

интеграл

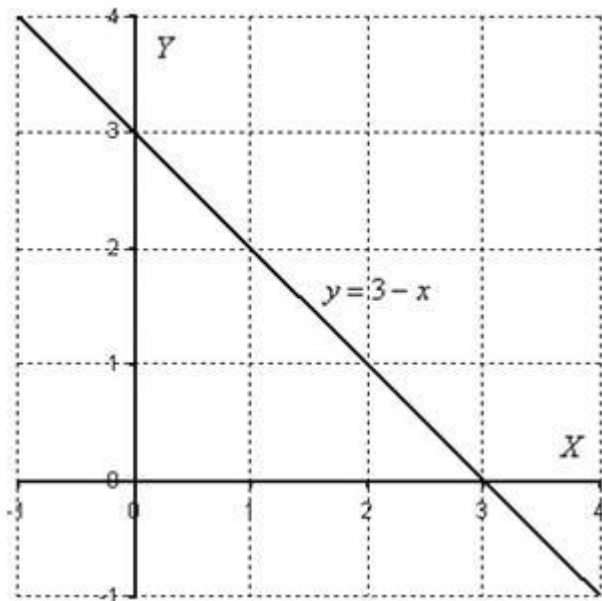
$$\iint_D (2x + y) dx dy \quad D: x + y = 3; y = 0; x = 0$$

Решение: сначала рассмотрим то, чего делать не нужно – в данном случае не следует использовать свойства линейности кратного интеграла и представлять его в виде:

$$\iint_D (2x + y) dx dy = 2 \iint_D x dx dy + \iint_D y dx dy$$

Почему? Вычислений заметно прибавится!

Решение, как обычно, начинаем с построения области интегрирования:



В данном примере, как легко заметить, не имеет особого значения порядок интегрирования, поэтому выберем первый, более привычный вариант обхода области:

$$0 \leq y \leq 3 - x$$

$$0 \leq x \leq 3$$

Таким образом:

$$\iint_D (2x + y) dx dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2x + y) dy$$

Здесь из внутреннего интеграла ничего вынести нельзя, поскольку начинкой является сумма.

С повторными интегралами опять разбираемся по отдельности.

1) Сначала берём внутренний интеграл:

$$\int_0^{3-x} (2x + y) dy = \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{3-x} = 2x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} - 0 - 0 = 6x - 2x^2 + \frac{(3-x)^2}{2}$$

Если интегрирование проводится по «игрек», то переменная «икс» считается константой. И наоборот.

2) Берём оставшийся внешний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(6x - 2x^2 + \frac{(3-x)^2}{2} \right) dx &= \int_0^3 (6x - 2x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^3 (3-x)^2 dx = \\ &= \left(3x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 (3-x)^2 d(3-x) = 27 - 18 - 0 + 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (3-x)^3 \Big|_0^3 = \\ &= 9 - \frac{1}{6} (0 - 27) = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2} \end{aligned}$$

При нахождении интеграла $\int_0^3 (3-x)^2 dx$ использован метод подведения функции под знак дифференциала.

Ответ: $\iint_D (2x+y) dx dy = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

Содержание практической работы

Задание 1.

Построить область интегрирования и изменить порядок интегрирования

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt[3]{y+1}}^{-y-1} f(x, y) dx$$

Задание 2.

Дан двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ с областью интегрирования $D: x=3; y=0; y=1-x$.
Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Задание 3.

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (2y^3 - x) dx dy, \quad D: y = x+2; y=0; x=0$$

Задание 4.

Вычислить двойной интеграл по области $D: x=0; y=2; y=\frac{x}{2}$

$$\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx dy$$

Задание 5.

С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры D , ограниченной линиями $y=e^x, y=e, x=0$

Задание 6.

С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры D , ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}, y=2, y=4, y=x-1$

Практическое занятие № 16

Тема: Действия над матрицами, вычисление определителей.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись «матрица B имеет размер $m \times n$ » означает, что

речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

имеет размер 2×3 . Далее, b_{ij} – обозначение элемента, стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i -ю строку матрицы A используют обозначение A_i , при ссылке на j -й столбец – обозначение A^j .

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется квадратной. Элементы a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} квадратной матрицы A (размера $n \times n$) образуют главную диагональ. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется диагональной. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется единичной. Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется верхней (нижней) треугольной матрицей. Например, среди квадратных матриц размера 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A , B называются равными ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти сумму матриц A, B одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Имеем: } \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1(4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера $m \times n$ и B размера $n \times p$, при этом $AB = C$, матрица C имеет размер $m \times p$, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B : $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,p$). Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы A 3×2 , матрицы B 2×2 . Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1,3) & (0;4)(-2;4) \\ (2;1)(1,3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, транспонированной к матрице A размера $m \times n$, называется матрица A^T размера $n \times m$, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A , B называются эквивалентными, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы A в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение $r(A)$. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 $r(A)=3$, $r(B)=2$. Можно доказать, что ранг матрицы A (размера $m \times n$) не может быть больше $\min\{m, n\}$ (например, для матрицы A размера 2×3 $r(A) \leq 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице B можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12} , а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы A размера 2×2 (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы A размера 3×3 (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу «раскрытие определителя по первой строке»:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \text{а}$$

затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

- 1) $3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix};$
- 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$
- 3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$
- 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T;$
- 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$
- 6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T;$

Задание 2. Доказать равенство $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

- 1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$
- 2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

$$3) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

Практические занятия № 17, 18

Тема: Решение системы линейных уравнений в матричной форме.

Тема: Решение СЛАУ методом Гаусса и методом Крамера

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Теоретические сведения:

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \quad (*)$$

$$\text{Матрица } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ составленная из коэффициентов системы (*),}$$

называется матрицей системы (ее размер – $m \times n$), а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ (m-мерный)-

столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ называют расширенной матрицей системы (*).}$$

Любой набор значений неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n , образующих n-мерный вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \text{ является решением системы (*), если эти числа}$$

удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ при каждом $i=1, 2, \dots, m$ (i-е уравнение представляет собой скалярное произведение i-й строки матрицы системы на вектор X), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \quad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7. \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$$

$$\text{Решение. Очевидно, что } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Пример 2. Записать СЛАУ, если } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введем в рассмотрение вектор X и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом – x_1 , со вторым – x_2 , с третьим – x_3 , с

четвертым - x_4 . Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений.

Определения и основные теоремы.

Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется совместной (соответственно, система несовместная, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть приведенной (а саму систему канонической), если в каждой i -й строке ($i=1,2,\dots,m$) есть элемент $a_{ij}=1$, а все остальные элементы j -го столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть ведущими, а оставшиеся неизвестные назовем свободными.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е. выполняется равенство $r(A) = r(A|B)$.

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется общим решением системы.

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. Прямой ход. Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. Обратный ход. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\begin{aligned}
 (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2=C_2+4C_1 \\ C_3=C_3-2C_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{C_3=C_3+C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3=C_3/10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{C_2=C_2-11C_3 \\ C_1=C_1-2C_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{\substack{C_1=C_1-C_2/6 \\ C_2=-C_2/6}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения

неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных

решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$\begin{aligned}
 (A|B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2=C_2-2C_1 \\ C_3=C_3-3C_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что $r(A|B) = r(A) = 3 = r$, число неизвестных $n=4$ и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2 . Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 - 4C_3 \\ C_1 = C_1 - 2C_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 = C_1 - 3C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -8 - 4x_2 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}. \text{ Общее решение записываем в порядке нумерации}$$

неизвестных: $X_{об} = (3; x_2; -8 - 4x_2; 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2 = 0$ $X_q = (3; 0; -8; 1)^T$, а при $x_2 = -1$ $X_q = (3; -1; -4; 1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \quad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены i -го столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$
 методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}. \text{ Далее вычисляем определители:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 - 4) - (-1)(12 + 16) - 1(-6 - 12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16 - 4) - (-1)(44 + 22) - 1(-22 - 44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44 + 22) - 4(12 + 6) - 1(33 - 33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44 + 22) - (-1)(33 - 33) + 4(-6 - 12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3$; $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$; $x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$. Для

проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Содержание практической работы № 17

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ, решить матричным методом.

$$1) (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 15 \end{array} \right)$$

$$2) (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array} \right)$$

$$3) (A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$4) (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

Содержание практической работы № 18

Задание 1. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

Задание 2. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$$

Практическое занятие № 19

Тема: Составление уравнений прямых и кривых 2-го порядка, их построение

Цель: сформировать умение составлять уравнения прямых и кривых второго порядка, строить прямые и кривые второго порядка по их уравнениям.

Теоретические сведения:

В аналитической геометрии линия на плоскости определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, это уравнение имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло “куска плоскости”. Важный класс линий составляют те, для которых функция $F(x,y)$ есть многочлен от двух переменных, в этом случае линия, определяемая уравнением $F(x,y)=0$, называется алгебраической. Алгебраические линии, задаваемые уравнением первой степени, суть прямые. Уравнение второй степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или линию, распадающуюся на две прямые.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Прямая на плоскости может быть задана одним из уравнений:

1⁰. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.1)$$

Вектор $\mathbf{n}(A, B)$ ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.

2⁰. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (2.2)$$

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox , $M(x_0, y_0)$ - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение (2.2) принимает вид $y = kx + b$, если $M(0, b)$ есть точка пересечения прямой с осью Oy .

3⁰. Уравнение прямой в отрезках

$$x/a + y/b = 1, \quad (2.3)$$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

4⁰. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки - $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.4)$$

5⁰. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно данному вектору $a(m, n)$

$$\frac{y - y_1}{n} = \frac{x - x_1}{m}. \quad (2.5)$$

6⁰. Нормальное уравнение прямой

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0 - p = 0, \quad (2.6)$$

где \mathbf{r} - радиус-вектор произвольной точки $M(x, y)$ этой прямой, \mathbf{n}^0 - единичный вектор, ортогональный этой прямой и направленный от начала координат к прямой; p - расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox .

Уравнение пучка прямых с центром в точке $A(x_1, y_1)$ имеет вид:

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1),$$

где λ - параметр пучка. Если пучок задается двумя пересекающимися прямыми $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то его уравнение имеет вид:

$$\lambda (A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

где λ и μ - параметры пучка, не обращающиеся в 0 одновременно.

Величина угла между прямыми $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ задается формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} \right|.$$

Равенство $1 + k_1 k = 0$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых.

Для того, чтобы два уравнения

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad (2.8)$$

задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2.$$

Уравнения (2.7), (2.8) задают две различные параллельные прямые, если $A_1/A_2 = B_1/B_2$ и $C_1/C_2 \neq 1$; прямые пересекаются, если $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из точки M_0 к прямой. Если прямая задана нормальным уравнением, то $d = |r_0 \cdot n^0 - p|$, где r_0 - радиус-вектор точки M_0 или, в координатной форме, $d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Предполагается, что среди коэффициентов уравнения a_{11} , a_{12} , a_{22} есть отличные от нуля.

Уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом, равным R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (2.9)$$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (2.10)$$

Эллипс, заданный уравнением (2.10), симметричен относительно осей координат. Параметры a и b называются полуосями эллипса.

Пусть $a > b$, тогда фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется эксцентриситетом эллипса. Расстояния от точки $M(x, y)$ эллипса до его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x.$$

Если же $a < b$, то фокусы находятся на оси Oy , $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$, $r_1 = b + \varepsilon y$, $r_2 = b - \varepsilon y$.

Если $a = b$, то эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса a .

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равна по абсолютной величине данному числу $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1. \quad (2.11)$$

Гипербола, заданная уравнением (2.11), симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось Ox в точках $A(a,0)$ и $A(-a,0)$ - вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy .

Параметр a называется вещественной полуосью, b - мнимой полуосью. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ есть расстояние от фокуса до начала координат. Отношение $c/a = \epsilon > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Прямые, уравнения которых $y = \pm b/a x$ называются асимптотами гиперболы. Расстояния от точки $M(x,y)$ гиперболы до ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = | \epsilon x - a |, r_2 = | \epsilon x + a |.$$

Гипербола, у которой $a = b$, называется равносторонней, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнение асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ называются сопряженными.

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ - парабола симметрична относительно оси Ox .

2) $x^2 = 2py$ - парабола симметрична относительно оси Oy .

В обоих случаях $p > 0$ и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола, уравнение которой $y^2 = 2px$ имеет фокус $F(p/2, 0)$ и директрису $x = -p/2$, фокальный радиус-вектор точки $M(x,y)$ на ней $r = x + p/2$.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$ имеет фокус $F(0, p/2)$ и директрису $y = -p/2$; фокальный радиус-вектор точки $M(x,y)$ параболы равен $r = y + p/2$.

Уравнение $F(x, y) = 0$ задает линию, разбивающую плоскость на две или несколько частей. В одних из этих частей выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в других - неравенство $F(x, y) > 0$. Иными словами, линия $F(x, y) = 0$ отделяет часть плоскости, где $F(x, y) > 0$, от части плоскости, где $F(x, y) < 0$.

Прямая, уравнение которой $Ax + By + C = 0$, разбивает плоскость на две полуплоскости. На практике для выяснения того, в какой полуплоскости мы имеем $Ax + By + C < 0$, а в какой $Ax + By + C > 0$, применяют метод контрольных точек. Для этого берут контрольную точку (разумеется, не лежащую на прямой, уравнение которой $Ax + By + C = 0$) и проверяют, какой знак имеет в этой точке выражение $Ax + By + C$. Тот же знак имеет указанное выражение и во всей полуплоскости, где лежит контрольная точка. Во второй полуплоскости $Ax + By + C$ имеет противоположный знак.

Точно так же решаются и нелинейные неравенства с двумя неизвестными.

Например, решим неравенство $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 > 0$. Его можно переписать в виде $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 25 > 0$.

Уравнение $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 25 = 0$ задает окружность с центром в точке $C(2, -3)$ и радиусом 5. Окружность разбивает плоскость на две части - внутреннюю и внешнюю. Чтобы узнать, в какой из них имеет место данное неравенство, возьмем контрольную точку во внутренней области, например, центр $C(2, -3)$ нашей окружности. Подставляя координаты точки C в левую часть неравенства, получаем отрицательное число -25. Значит, и во всех точках, лежащих внутри окружности, выполняется неравенство $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 < 0$. Отсюда следует, что данное неравенство имеет место во внешней для окружности области.

Пример 1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(3, 1)$ и наклоненных к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45° .

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Поскольку прямая проходит через точку A , то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $1 = 3k + b$, $\square b = 1 - 3k$. Величина угла между прямыми

$y = k_1x + b_1$ и $y = kx + b$ определяется формулой $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} \right|$. Так как угловой коэффициент k_1 исходной прямой $2x + 3y - 1 = 0$ равен $-2/3$, а угол $\varphi = 45^\circ$, то имеем уравнение для определения k :

$$(2/3 + k)/(1 - 2/3k) = 1 \text{ или } (2/3 + k)/(1 - 2/3k) = -1.$$

Имеем два значения k : $k_1 = 1/5$, $k_2 = -5$. Находя соответствующие значения b по формуле $b = 1 - 3k$, получим две искомые прямые, уравнения которых: $x - 5y + 2 = 0$ и $5x + y - 16 = 0$.

Пример 2. При каком значении параметра t прямые, уравнения которых $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1+t)x - 2ty = 0$, параллельны?

Решение. Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $3t/(1+t) = -8/(-2t)$. Решая полученное уравнение, находим t : $t_1 = 2$, $t_2 = -2/3$.

Пример 3. Найти уравнение общей хорды двух окружностей: $x^2 + y^2 = 10$ и $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$.

Решение. Найдем точки пересечения окружностей, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 10 - 10x - 10y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (4 - x)^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, находим значения $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Из второго уравнения - соответствующие значения y : $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Теперь получим уравнение общей хорды, зная две точки $A(3, 1)$ и $B(1, 3)$, принадлежащие этой прямой: $(y-1)/(3-1) = (x-3)/(1-3)$, или $y + x - 4 = 0$.

Пример 4. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям $(x-3)^2 + (y-3)^2 < 8$, $x > y$?

Решение. Первое неравенство системы определяет внутренность круга, не включая границу, т.е. окружность с центром в точке (3,3) и радиуса $\sqrt{8}$. Второе неравенство задает полуплоскость, определяемую прямой, уравнение которой $x = y$, причем, так как неравенство строгое, точки самой прямой не принадлежат полуплоскости, а все точки ниже этой прямой принадлежат полуплоскости. Поскольку мы ищем точки, удовлетворяющие обоим неравенствам, то искомая область - внутренность полукруга.

Пример 5. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс, уравнение которого $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Решение. Пусть $M(c, c)$ - вершина квадрата, лежащая в первой четверти. Тогда сторона квадрата будет равна $2c$. Т.к. точка M принадлежит эллипсу, ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса $c^2/a^2 + c^2/b^2 = 1$, откуда $c = ab / \sqrt{a^2 + b^2}$; значит, сторона квадрата - $2ab / \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 6. Зная уравнение асимптот гиперболы $y = \pm 0,5 x$ и одну из ее точек $M(12, 3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы.

Решение. Запишем каноническое уравнение гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Асимптоты гиперболы задаются уравнениями $y = \pm 0,5 x$, значит, $b/a = 1/2$, откуда $a=2b$. Поскольку M - точка гиперболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, т.е. $144/a^2 - 27/b^2 = 1$. Учитывая, что $a = 2b$, найдем b : $b^2=9 \Rightarrow b=3$ и $a=6$. Тогда уравнение гиперболы - $x^2/36 - y^2/9 = 1$.

Пример 7. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC , вписанного в параболу с параметром p , предполагая, что точка A совпадает с вершиной параболы.

Решение. Каноническое уравнение параболы с параметром p имеет вид $y^2 = 2px$, вершина ее совпадает с началом координат, и парабола симметрична относительно оси абсцисс. Так как прямая AB образует с осью Ox угол в 30° , то уравнение прямой имеет вид: $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$. большим количеством графиков

Следовательно, мы можем найти координаты точки B , решая систему уравнений $y^2=2px$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$, откуда $x = 6p$, $y = 2\sqrt{3}p$. Значит, расстояние между точками $A(0,0)$ и $B(6p, 2\sqrt{3}p)$ равно $4\sqrt{3}p$.

Содержание практической работы:

Вариант 1

1. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3; -2)$ принадлежит данной прямой.

2. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.

3. Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Вариант 2

1. Составить уравнение прямой, если известно, что её угол наклона к положительному направлению оси OX составляет $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, и точка $K(-2; 1)$ принадлежит данной прямой

2. Составить уравнение прямой по точке $M(-1; -3)$ и вектору нормали $\vec{n}(3; -1)$. Найти направляющий вектор прямой.

3. Составить каноническое уравнение эллипса, если известен один из его фокусов $F_2(-2; 0)$ и малая полуось $b = 2$ (центр находится в начале координат). Найти вершины, дополнительные точки и изобразить линию на чертеже. Вычислить эксцентриситет.

Вариант 3

1. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\vec{P}(2; 1)$

2. Составить уравнение прямой по точке $A(0; 2)$ и нормальному вектору $\vec{n}(-8; 6)$. Найти направляющий вектор прямой.

3. Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Вариант 4

1. Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\vec{P}(-7; 5)$

2. Дана прямая $5x - 7y + 11 = 0$. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки пересечения графика с координатными осями.

3. Составить каноническое уравнение эллипса, если известен один из его фокусов $F_2(-2; 0)$ и малая полуось $b = 2$ (центр находится в начале координат). Найти вершины, дополнительные точки и изобразить линию на чертеже. Вычислить эксцентриситет.

Вариант 5

1. Составить уравнение прямой по точке $A(0; 3)$ и направляющему вектору $\vec{j}(0; 1)$.

2. Построить эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

3. Построить график линии, заданной уравнением $x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$

Вариант 6

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $K(8; 2), L\left(3; \frac{3}{4}\right)$.

2. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки её пересечения с координатными осями.

$$3x + 2y - 4 = 0$$

3. Составить каноническое уравнение эллипса, если известен один из его фокусов

$F_2(-2; 0)$ и малая полуось $b = 2$ (центр находится в начале координат). Найти вершины, дополнительные точки и изобразить линию на чертеже. Вычислить эксцентриситет.

2. Литература

Основные источники:

1 Элементы высшей математики : учебное пособие для СПО / В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, М. М. Михалева [и др.] ; под редакцией Б. М. Веретенникова. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 296 с. — ISBN 978-5-4488-0395-6, 978-5-7996-2795-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87794.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительные источники:

1 Алпатов, А. В. Математика : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 с. — ISBN 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/80328.html>. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2 Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/81274.html>. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

3 Игумнов, Л. А. Методы вычислительной математики. Анализ и исследование функций : учебное пособие / Л. А. Игумнов, С. Ю. Литвинчук, Т. В. Юрченко. — Нижний Новгород : Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2018. — 88 с. — ISBN 978-5-528-00256-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/80905.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4 Игумнов, Л. А. Методы вычислительной математики. Решение уравнений и систем уравнений : учебное пособие / Л. А. Игумнов, С. Ю. Литвинчук, Т. В. Юрченко. — Нижний Новгород : Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-528-00268-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/80906.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

№ п.п.	Содержание изменения	Дата, номер протокола заседания педагогического совета
1	2	3
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		